**2ο Σετ Ασκήσεων: Ισορροπίες Nash σε Διμητρικά Παιχνίδια**

Μπάλλας Μιχαήλ

A.Μ. 1072599

up1072599@upnet.gr

Σούρλας Ζήσης

Α.Μ. 1072477

sourlas.zisis@upnet.gr

/05/2023

**Θεωρητικό Ερώτημα 1 (Γεννήτρια Παιχνιδιών)**

**Θ.Ε. 1.1**

Εφόσον σημαίνει ότι ο παίκτης στήλης είτε έπαιξε αμιγώς μια στήλη η οποία στην πρώτη γραμμή περιέχει ένα 0,1-στοιχείο είτε ότι έπαιξε μια μικτή στρατηγική «μιξάροντας» μεταξύ στηλών που στην πρώτη γραμμή περιέχουν (0,1) και (0,0)-στοιχεία. Σε κάθε περίπτωση αποκλείεται να έπαιξε (είτε αμιγώς είτε μεικτά) σε στήλη που έχει (1,0) στοιχείο στην πρώτη γραμμή καθώς αυτό θα σήμαινε την ανάθεση πιθανότητας σε στήλη που αποδίδει όφελος στην παίκτρια γραμμής. Ωστόσο η γεννήτρια παιχνιδιών είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε κάθε στήλη να έχει τουλάχιστον ένα (1,0) στοιχείο. Συνεπώς η παίκτρια γραμμής θα μπορούσε να παίξει σε μια γραμμή που να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα (1,0) στοιχείο σε στήλη που έχει επιλέξει ο παίκτης στήλης. Τέτοια γραμμή είναι εγγυημένο ότι υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση η ωφέλεια της παίκτριας γραμμής θα ήταν μεγαλύτερη του μηδενός και κατά συνέπεια στην παρούσα κατάσταση δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

**Θ.Ε. 1.2**

Για να ισχύει ότι θα πρέπει ο παίκτης στήλης να έχει επιλέξει είτε μια αμιγή στρατηγική σε στήλη που έχει (1,0)- στοιχείο στην πρώτη γραμμή (δηλαδή αυτή που επέλεξε η παίκτρια γραμμής) είτε μια αμιγή στρατηγική που να «μιξάρει» μεταξύ στηλών με (0,0), (0,1) και (1,0)- στοιχεία στην πρώτη γραμμή. Σε κάθε περίπτωση έχει αναθέσει κάποια (ή όλη) μάζα πιθανότητας σε στήλη που περιέχει (1,0) στοιχείο στην πρώτη γραμμή εξ ου και η θετική ωφέλεια για την παίκτρια γραμμής. Ο παίκτης στήλης θα μπορούσε να αυξήσει την ωφέλειά του (η οποία μπορεί να είναι θετική ή μηδέν) μεταθέτοντας την μάζα πιθανότητας που ανάθεσε σε στήλες με (1,0) και (0,0) στοιχεία σε στήλες με (0,1)-στοιχεία στην πρώτη γραμμή. Αν δε υπάρχει μόνο μία τέτοια στήλη θα μπορούσε να παίξει αμιγώς αυτή. Είναι επιπλέον εγγυημένο ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα (0,1) στοιχείο στην πρώτη γραμμή και κατά συνέπεια αυτή η στρατηγική είναι πάντα εφικτή. Συνεπώς εφόσον ο παίκτης στήλης μπορεί να αυξήσει την ωφέλειά του δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

**Θεωρητικό Ερώτημα 2 (Εντοπισμός Αυστηρά Κυριαρχούμενων Δράσεων)**

**Θ.Ε. 2.1**

Για να ισχύει ότι για θα πρέπει να μην υπάρχει καμία στήλη με (1,0) στοιχείο στη συγκεκριμένη γραμμή. Σε διαφορετική περίπτωση για κάποια δράση j του παίκτη στήλης η παίκτρια γραμμής θα είχε θετική ωφέλεια. Εφόσον για κάθε στήλη υπάρχει ένα τουλάχιστον (1,0)- στοιχείο σε κάποια γραμμή, υπάρχει σίγουρα μικτή στρατηγική που κυριαρχεί επί της . Αυτή προκύπτει «μιξάροντας» μεταξύ γραμμών οι οποίες έχουν (1,0)- στοιχεία σε διαφορετικές στήλες (πιθανώς και σε κάποιες ίδιες) με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε στήλη να υπάρχει μια γραμμή με (1,0) στοιχείο για την στήλη αυτή κάτι που είναι πάντα εφικτό δεδομένης της συγκεκριμένης γεννήτριας παιχνιδιών. Για μια τέτοια στρατηγική έστω ισχύει ότι . Κατά συνέπεια κυριαρχεί αυστηρά επί της .

**Θ.Ε. 2.2**

Αντίστοιχα για να ισχύει ότι για θα πρέπει να μην υπάρχει καμία γραμμή με (0,1) στοιχείο στη συγκεκριμένη στήλη. Σε διαφορετική περίπτωση για κάποια δράση i της παίκτριας γραμμής, ο παίκτης στήλης θα είχε θετική ωφέλεια. Εφόσον για κάθε γραμμή υπάρχει ένα τουλάχιστον (0,1)- στοιχείο σε κάποια στήλη, υπάρχει σίγουρα μικτή στρατηγική που κυριαρχεί επί της . Αυτή προκύπτει «μιξάροντας» μεταξύ στηλών οι οποίες έχουν (0,1)- στοιχεία σε διαφορετικές γραμμές (πιθανώς και σε κάποιες ίδιες) με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε γραμμή να υπάρχει μια στήλη με (0,1) στοιχείο για την γραμμή αυτή κάτι που είναι πάντα εφικτό δεδομένης της συγκεκριμένης γεννήτριας παιχνιδιών. Για μια τέτοια στρατηγική έστω ισχύει ότι . Κατά συνέπεια κυριαρχεί αυστηρά επί της .